Cálculos mentales 3

El cálculo mental

Tradicionalmente el cálculo mental se asociaba a cálculos memorizados, orales, realizados en “la cabeza”, sin lápiz y papel. Hoy en día ya no resulta tan importante la velocidad o la memoria, especialmente por el fácil acceso a las calculadoras, pero sí aparecen otros objetivos y otras prácticas que se espera producir en torno al cálculo.

Los procedimientos de cálculos algoritmizados consisten en una serie de reglas aplicables en un orden determinado, siempre del mismo modo, independientemente de los datos, que garantizan alcanzar el resultado buscado en una serie de pasos.

En contraste, el cálculo mental refiere al “conjunto de procedimientos que analizando los datos por tratar, se articulan sin recurrir a un algoritmo preestablecido, para obtener resultados exactos o aproximados” (Parra, C.). Es decir, se caracteriza por la presencia de una diversidad de técnicas vinculadas a los números en juego y los conocimientos (o preferencias) del sujeto que las despliega.

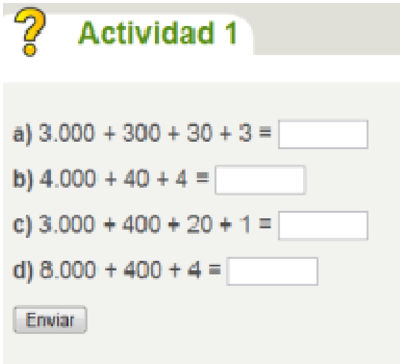
El cálculo mental provee una ocasión privilegiada de hacer funcionar las propiedades de las operaciones en relación con las características del sistema de numeración posicional y decimal. Permite por esa misma razón una profundización en los conocimientos sobre las operaciones y sobre nuestro sistema de numeración.

Sistema de numeración

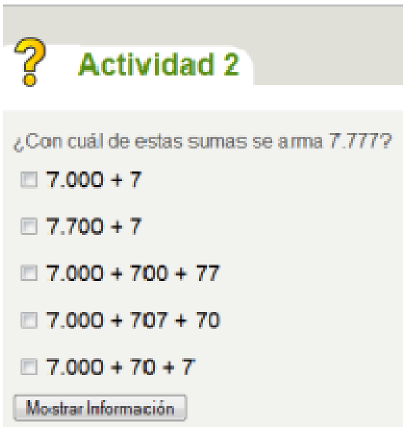
En este recurso se abordan las propiedades de nuestro sistema de numeración. El agrupamiento en base 10 y la posicionalidad son características que favorecen cálculos mentales con sumas, restas, multiplicaciones y divisiones por la unidad seguida de ceros. Con las actividades se busca promover un trabajo reflexivo en torno a dichos cálculos. Muchas de las actividades apuntan al análisis de las escrituras numéricas para profundizar en la mirada acerca de lo que ellas informan.

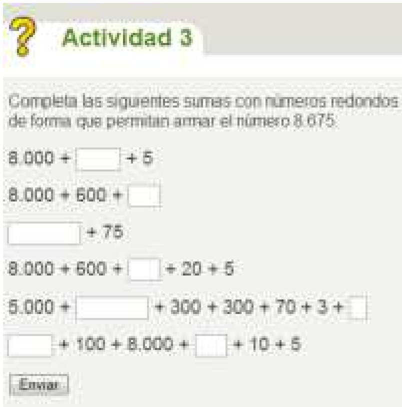
Comenzamos con cálculos sencillos que llevan a realizar composiciones y descomposiciones aditivas. Estos primeros cálculos favorecen una primera explicitación acerca del valor posicional y las transformaciones que se operan en cada una de las cifras al sumar y restar algunos números.

Sumar y restar para armar y desarmar números

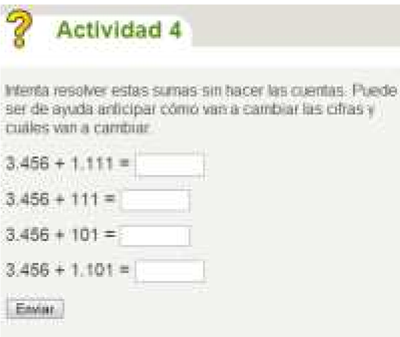


Las actividades 1 y 2 tienen la intención de que los alumnos puedan identificar cómo se "arma" el número teniendo en cuenta el valor posicional de las cifras. Por ejemplo, para el ítem a), se pretende que aparezcan explicaciones como "*escribo el 3 de 3.000, el 3 de 300, el 3 de 30 y el 3*". También el recurrir a la oralidad permitirá reconstruir el nombre del número y luego escribirlo: "*tres mil más trescientos más treinta y tres es tres mil trescientos treinta y tres*". O, para el ítem d): "*escribo el 8 de 8.000, el 4 de 400, un 0 para los dieces o decenas y un 4 y se arma 8.404*".





Para la actividad 3 será interesante que alentemos a los alumnos a encontrar diferentes descomposiciones aditivas, ello implicará poner en juego las relaciones entre las posiciones contiguas.



La actividad 4 tiene la intención de que los alumnos puedan identificar que el análisis de la posición de cada cifra que se suma permite anticipar el resultado. Se espera que puedan, luego de resolver el problema, arribar a ideas como las siguientes: "*al sumar 111 a 3.456 aumentará en 1 la cifra de las unidades, de las decenas y de las centenas*" o "*sube en 1 el 6, sube en 1 el 5 y sube en 1 el 4*".

De manera inversa, se espera, a través de la actividad 5, que los alumnos puedan identificar que para que el 6 se transforme en 0 habrá que restar 6, ó 60 ó 600 ó 6.000 según de "cuál 6 se trate". El análisis del valor de posición de cada una de las cifras permitirá anticipar el número a restar, sin hacer cuentas.

La consigna final tiene la intención de promover un momento colectivo de trabajo sobre los cinco problemas, que apunte a sistematizar y organizar los nuevos conocimientos producidos.

Monedas y billetes

Estas actividades involucran el análisis de las escrituras numéricas en el contexto del dinero, ya que favorece que los alumnos desplieguen variados recursos de cálculo y puedan imaginar las descomposiciones, inicialmente, en términos de monedas y billetes de 1.000, 100, 10 y 1. Se espera que los alumnos puedan avanzar hacia diferentes descomposiciones aditivas y multiplicativas de un número, basadas en la organización decimal del sistema de numeración, progresivamente sin apoyarse en el contexto del dinero.

El objetivo de la actividad 1 es que los alumnos "entren" en la situación. Es de esperar que, al hacerlo, adviertan que las cifras que escriben en cada una de las casillas son las del número. Este hecho es uno de los aspectos de debemos analizar con los alumnos, una vez que el cuadro haya sido terminado.

Una segunda cuestión a discutir es el hecho de que el número "porta" cierta información. Se busca que los alumnos avancen en la posibilidad de interpretar la información que una escritura numérica ofrece. Así, por ejemplo, "mirando" el número 398 puede saberse que una descomposición posible para ese número es 3 x 100 + 9 x 10 + 8. Se trata justamente de aprender a ver información, que tal vez antes pasaba inadvertida.

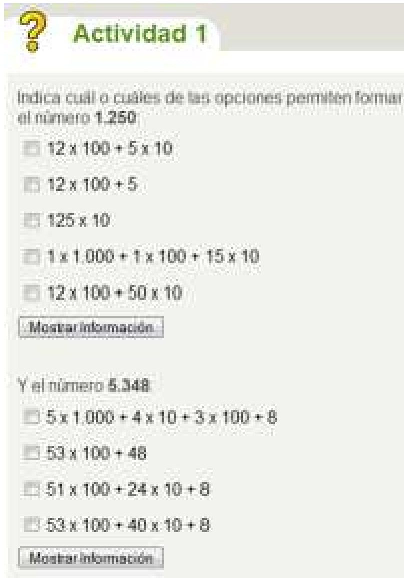
Estas primeras relaciones son una base para explorar otras más complejas que ponen en juego las relaciones de valor entre posiciones contiguas como, por ejemplo, 15 x 100 + 3 x 1 para 1.503.

En las actividades 2 y 3 los alumnos tendrán que poner en juego las relaciones entre las diferentes posiciones: 1 de 1.000 es equivalente a 10 de 100; 1 de 100 equivale a 10 de 10, etc. Por ejemplo, al no haber billetes de 1.000 para formar 3.240, precisarán 32 de 100, o al no "haber más" billetes de 100 para formar 6.730, precisarán 73 monedas de 10.

La actividad 4 intenta avanzar sobre las relaciones analizadas anteriormente pero organizadas en torno a un único cálculo escrito.

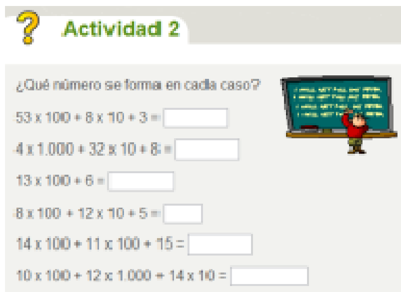
Armar números con multiplicaciones por 10, 100 y 1.000

Los contenidos que se presentan en estas actividades son similares a los anteriores, pero presentan un mayor nivel de complejidad al haberse retirado el contexto del dinero. Sin embargo, es absolutamente esperable que los alumnos resuelvan los problemas imaginando billetes y monedas.

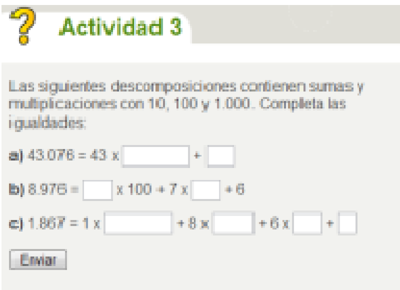


Es importante que un mismo contenido o grupo de contenidos se juegue en varias actividades, no sólo para que los alumnos tengan nuevas oportunidades de atrapar las relaciones involucradas que pudieron haber quedado pendientes, sino también porque actividades diferentes permiten mostrar nuevas aristas de un mismo concepto. Por ello se despliega una variedad de actividades que involucran el análisis del valor posicional, con diferentes conocimientos involucrados en cada uno de ellos.

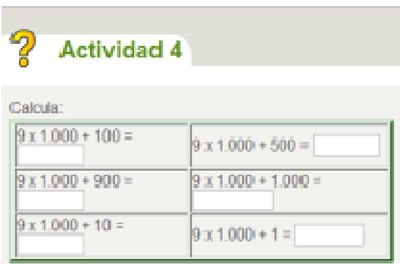
La actividad 1 apunta a que los alumnos puedan analizar diferentes descomposiciones para un mismo número. Seguramente muchos alumnos intentarán hacer todos los cálculos. Nuestra función docente es intervenir para enfatizar y hacer circular estrategias ligadas al análisis del valor posicional, para las cuales no es necesario realizar, al menos, todos los cálculos.

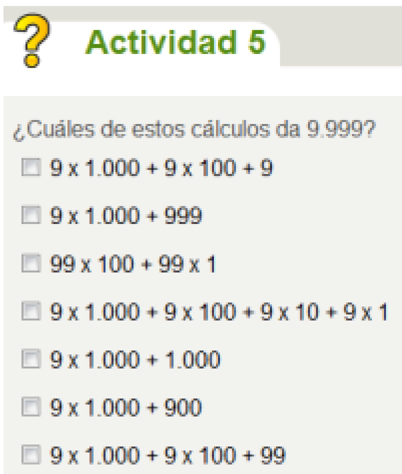


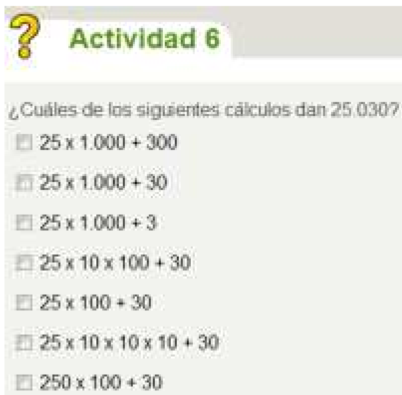
La actividad 2 exige, inversamente, componer el número a partir de la escritura del cálculo.



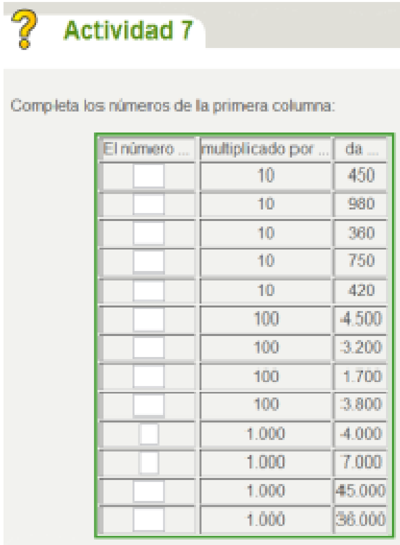
Las actividades 3, 4, 5 y 6 permiten reinvertir los conocimientos desplegados en las actividades anteriores. Algunas de ellas exigen componer el número y otras realizar descomposiciones variadas usando la suma y la multiplicación por la unidad seguida de ceros.







La actividad 7 plantea una situación que inicialmente es exploratoria para los alumnos. Se trata de encontrar un número que, multiplicado por 10, dé el número que se ofrece en el cuadro como producto. Se espera que los alumnos tengan la posibilidad de investigar qué relaciones hay entre los números que se ofrecen y los resultados obtenidos antes de formular una regla que les permita hallar las demás soluciones. Será interesante discutir estas estrategias. Por ejemplo, si la estrategia predominante fue la de ir buscando por cuánto multiplicar, se puede plantear una discusión sobre las relaciones entre los números de la columna de la derecha con los de las otras columnas una vez que el cuadro está terminado: ¿qué relación hay entre 450, 45 y 10?, etc. En la clase se podrá hacer jugar la relación entre división y multiplicación, por ejemplo identificar que es posible pensar por qué número multiplicar a 45 para que dé 450 o bien pensar 450 : 10 = 45.


Actividad 7

Completa los números de la primera columna:

El número ...	multiplicado por ...	da ...
	10	450
	10	980
	10	360
	10	750
	10	420
	100	4.500
	100	3.200
	100	1.700
	100	3.800
	1.000	4.000
	1.000	7.000
	1.000	45.000
	1.000	36.000

Es importante que, además de formular la regla de "agregar ceros", los alumnos se vean invitados a explorar explicaciones acerca de "por qué se agregan ceros". Se espera que puedan circular ideas como "las unidades pasan a las decenas y entonces el cero llena las unidades" o "al multiplicar por 100 todo se corre dos posiciones porque los unos valen cienes, los dieces miles, y los ceros se agregan para mostrar que no hay más unos y dieces", entre otras posibles.

Relaciones entre sistema de numeración y división por 10, 100 y 1.000

Estas actividades tienen como finalidad introducir a los alumnos en un nuevo análisis de las relaciones entre escrituras numéricas, divisiones y multiplicaciones por 10, 100, 1.000, etc. Nuevamente se espera que los alumnos logren identificar la información que porta un número y explicitar las relaciones aritméticas que subyacen a un número. En este caso se pondrá en juego la división por la unidad seguida de ceros. Se espera promover el análisis de por qué funciona la regla de "sacar ceros", además de que los alumnos puedan usarla.

Se usa la noción de cociente entero que supone la relación "dividendo = cociente x divisor + resto". Sería conveniente ayudar a los alumnos a recordarla a partir de algunas divisiones sencillas.


Actividad 1

Completa el cuadro. Seguramente no va a ser necesario que hagas las cuentas escritas ya que los resultados obtenidos en una te serán de utilidad para la otra.

Dividendo	Divisor	Cociente	Resto
30	10		
31	10		
32	10		
33	10		
34	10		
35	10		
36	10		
37	10		
38	10		
39	10		
40	10		
41	10		
42	10		
43	10		

Enviar

La actividad 1 tiene la intención de generar un conjunto de resultados que permitan a los alumnos enfrentarse a la elaboración de unas primeras conjeturas a propósito de explorar qué relaciones es posible establecer entre un número dado y el cociente que se obtiene al dividir ese número por 10.

? Actividad 2

a) Si cada uno de estos números se divide por 10, ¿cuál será el cociente entero?

Número	Cociente entero
30	
35	
38	
40	
45	
48	

b) Si cada uno de estos números se divide por 100, ¿cuál será el cociente entero?

Número	Cociente entero
100	
102	
120	
180	
190	
195	
200	

c) Si cada uno de estos números se divide por 1.000, ¿cuál será el cociente entero?

Número	Cociente entero
1.000	
2.000	
2.100	
2.350	
2.930	
3.000	
3.500	

d) Calcula:

20.000 : 10 =

20.000 : 1.000 =

20.000 : 100 =

20.000 : 10.000 =

Enviar

Seguramente, a medida que avanzan en la producción de los resultados, irán empezando a notar ciertas regularidades en "qué sucede" con el divisor, el cociente y el resto. Se espera que puedan elaborar ideas como "*a medida que aumenta el dividendo en uno el resto aumenta en uno*", "*cuando el resto llegar a 9, ya no aumenta el resto sino que aumenta el cociente*", "*hay muchos números con el mismo cociente*", etc.

La actividad 2 busca que los alumnos, ya sin la serie presente de los números, puedan anticipar, sin hacer cálculos, el cociente. Aunque no se solicite, los alumnos se verán enfrentados a analizar el resto. Es, en el comienzo, una actividad de exploración y, por lo tanto, alentaremos a los alumnos a que utilicen cualquier procedimiento para completar los primeros resultados de cada tabla. Esta exploración puede interrumpirse en el punto en que los alumnos comienzan a descubrir cierta regularidad en los cocientes para dar lugar a una discusión colectiva sobre las razones que permiten establecer esta regularidad. La idea es que los argumentos que se esgriman en esta discusión permitan anticipar cuáles serán los resultados de los casilleros de la tabla que aún falta completar.

? Actividad 3

Completa las siguientes tablas:

Cálculo	Cociente	Resto
1.234 : 10		
1.234 : 100		
1.234 : 1.000		

Cálculo	Cociente	Resto
4.672 : 10		
4.672 : 100		
4.672 : 1.000		

Cálculo	Cociente	Resto
48.530 : 10		
48.530 : 100		
48.530 : 1.000		
48.530 : 10.000		

Enviar

Se espera que los alumnos apelen a relaciones establecidas en actividades anteriores (por ejemplo: "35 : 10 tiene cociente 3 y resto 5 porque 35 = 30 + 5 = 3 x 10 + 5"), y/o a relaciones ya conocidas ("38 : 10 tiene cociente 3 porque 3 x 10 = 30 y si hago 4 x 10 da 40 y ya me paso de 38"). También podemos recurrir a relaciones que no sean utilizadas espontáneamente y proponer algunos argumentos. Por ejemplo: si 3 x 10 = 30, 30 : 10 = 3, si 2 x 100 = 200, entonces 200 : 100 = 2, etc.

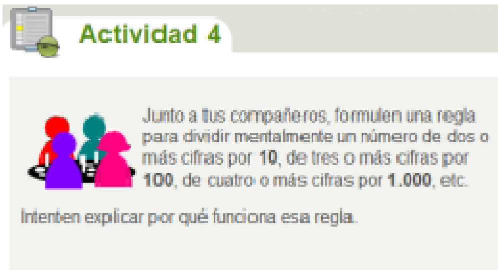
La actividad 3 tiene su punto de apoyo en los conocimientos elaborados por los alumnos en las actividades anteriores. Para explicar que es posible saber que el cociente de 1.234 : 10 es 123 y el resto 4, se puede apelar a 123 x 10 = 1.230 y 1.230 + 4 = 1.234. Entonces, 1.234 = 123 x 10 + 4.

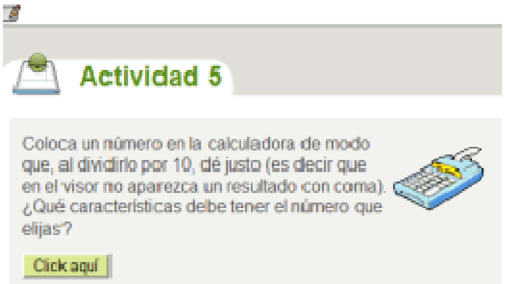
Otra explicación a la que se aspira es que los alumnos planteen que la división por 10 se puede pensar como “armar paquetes de 10”. De ese modo, como la posición de las unidades nunca va a tener 10, la cifra que esté en esa ubicación va a ser el resto de dividir por 10, “porque no alcanza para un paquete más”. Si la división fuera por 100, este razonamiento se extendería a las dos últimas cifras, etc.

Es usual que los alumnos propongan y admitan estas explicaciones cuando los divisores son 10 y 100, pero se desconcierten cuando los divisores son mayores, como por ejemplo 1.000, y rechacen la posibilidad de que existan restos tales como 530 porque es un número demasiado grande comparado con los restos usuales. En esos casos, será necesario retomar las relaciones establecidas por números más pequeños y analizar que el tamaño del resto sólo está limitado por el del divisor.

En las actividades 1 y 2 quedó establecida cierta regularidad al realizar algunas divisiones por 10, 100 y 1.000. Se trata ahora de encontrar no sólo el cociente, sino también el resto de una división y de explorar, a la vez, qué va ocurriendo con los cocientes cuando a un mismo número se lo divide por distintas potencias de 10. En este sentido, esta actividad permite penar un mismo número como compuesto por multiplicaciones que son equivalentes. Por ejemplo: 1.234 = 1 x 1.000 + 234; 12 x 100 + 34; 123 x 10 + 4. El análisis de la actividad con los alumnos permitirá explicitar qué relaciones hay entre estas escrituras.

La actividad 4 está planteada para que los alumnos puedan “pasar en limpio” el conjunto de relaciones y conocimientos que han estado movilizando. En cierta medida es una propuesta que permite “resumir” lo que se aprendió hasta el momento no sólo a través de las explicaciones que elaboren los alumnos, sino también a partir de las que como docentes podamos ofrecer, “ordenando” las resoluciones que han circulado. Este es un aspecto muy importante ya que aún en los casos en los que los alumnos hayan podido resolver de manera correcta, no necesariamente las relaciones implícitas en sus resoluciones están estructuradas en un discurso organizado. El docente es quien remarca las propiedades que aparecieron, reorganiza las ideas que circularon para que tomen una forma coherente y sistematizada, identifica un procedimiento y analiza o explica una propiedad.



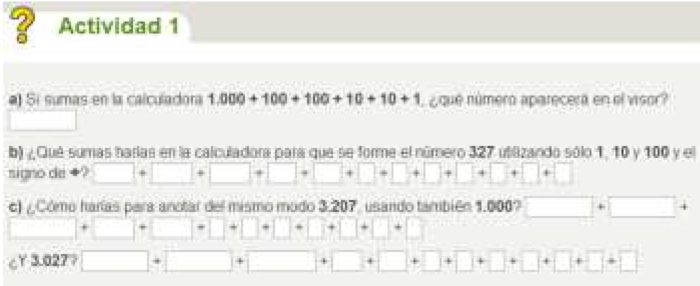


La actividad 5 busca que los alumnos puedan identificar que para que el número pueda dividirse por 10 y “dé justo”, es decir, tenga resto 0, deberá tener al 0 como última cifra. Podemos generalizar esta pregunta a las características que debería tener el número para cumplir los mismos requisitos al dividir por 100, por 1.000, etc.

Pensar sobre los números haciendo sumas y restas en la calculadora

En estas actividades se retoman aspectos ligados a la composición y descomposición de los números y a las relaciones aritméticas que subyacen a los mismos.

La actividad 1 tiene la finalidad de que los alumnos identifiquen que pueden anticipar el número "completando" o "llenando" lugares imaginarios a partir de los números escritos. Del mismo modo podrán anticipar cómo formarlo, a partir de interpretar el valor de cada cifra, por ejemplo pensar el 327 como 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1. En el punto c) los números han sido seleccionados de tal modo de provocar el análisis de cómo varía la descomposición del número según cómo los mismos números cambian de posición (en 3.207 y 3.027 "vuelven" a estar el 3, el 2 y el 7, esta vez con el 0, pero en diferente orden). Aún cuando los alumnos realicen estos problemas con éxito en la obtención de los resultados, será importante tratar los aspectos ligados al valor posicional en forma colectiva, para que sean explicitados e identificados.

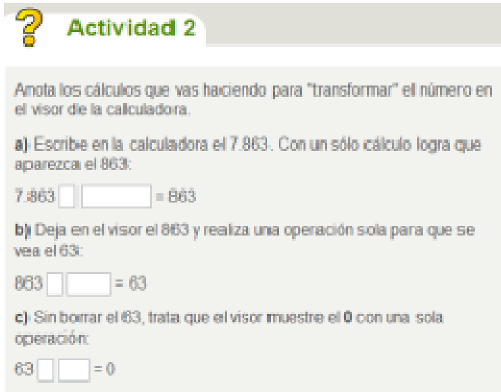

Actividad 1

a) Si sumas en la calculadora **1.000 + 100 + 100 + 10 + 10 + 1**, ¿qué número aparecerá en el visor?

b) ¿Qué sumas harías en la calculadora para que se forme el número **327** utilizando sólo **1**, **10** y **100** y el signo de **+**? + + + + + + + + + + +

c) ¿Cómo harías para anotar del mismo modo **3.207**, usando también **1.000**? + + + + + + + + + + +

¿Y **3.027**? + + + + + + + + + + + +


Actividad 2

Anota los cálculos que vas haciendo para "transformar" el número en el visor de la calculadora.

a) Escribe en la calculadora el 7.863. Con un sólo cálculo logra que aparezca el 863:

7.863 = 863

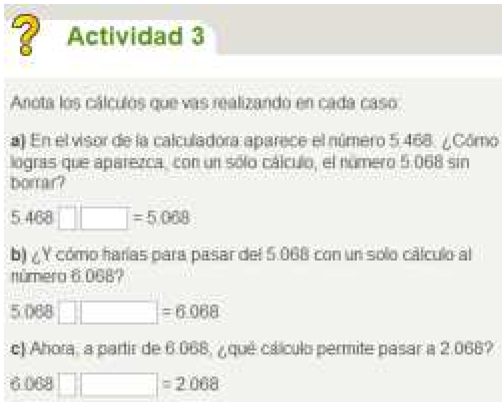
b) Deja en el visor el 863 y realiza una operación sola para que se vea el 63:

863 = 63

c) Sin borrar el 63, trata que el visor muestre el **0** con una sola operación:

63 = 0

Los problemas 2 y 3, con una complejidad interna creciente, tienen la intención de promover un trabajo anticipatorio nuevamente. Se espera que los alumnos puedan identificar qué número restar o sumar a otro para que cambie por otro número dado. El análisis colectivo deberá centrarse en el valor posicional, es decir en identificar que para que "desaparezca" el 8 de 863 se trata de sacar 800 y que esta información puede "leerse" en la posición de la cifra.


Actividad 3

Anota los cálculos que vas realizando en cada caso.

a) En el visor de la calculadora aparece el número 5.468. ¿Cómo logras que aparezca, con un sólo cálculo, el número 5.068 sin borrar?

5.468 = 5.068

b) ¿Y cómo harías para pasar del 5.068 con un solo cálculo al número 6.068?

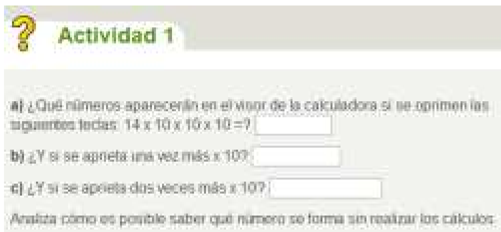
5.068 = 6.068

c) Ahora, a partir de 6.068, ¿qué cálculo permite pasar a 2.068?

6.068 = 2.068

Pensar sobre los números haciendo multiplicaciones y divisiones en la calculadora

La actividad 1 apela a los resultados que se van obteniendo cuando, a un mismo número, se lo multiplica o divide reiteradamente por 10.


Actividad 1

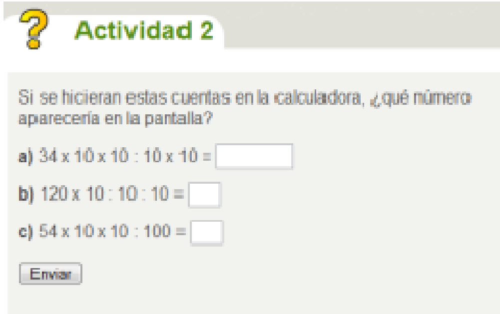
a) ¿Qué números aparecerán en el visor de la calculadora si se oprimen las siguientes teclas: 14 x 10 x 10 x 10 =?

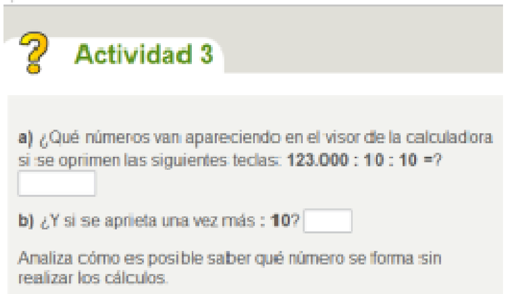
b) ¿Y si se aprieta una vez más x 10?

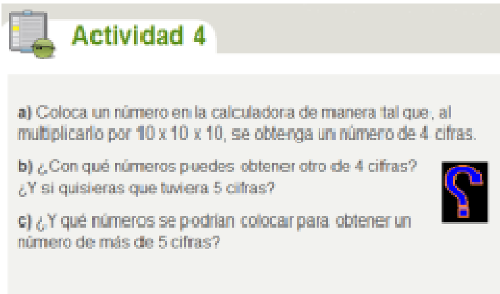
c) ¿Y si se aprieta dos veces más x 10?

Analiza cómo es posible saber qué número se forma sin realizar los cálculos.

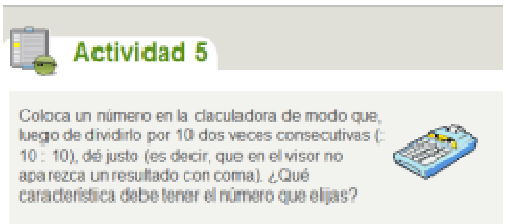
La actividad 2 intenta orientar hacia los efectos de aplicar sucesivamente multiplicaciones y divisiones por 10 a un mismo número y poder discutir relaciones tales como, por ejemplo, si se multiplica a un número por 10 y luego se divide al resultado por 10, el número original no se modifica porque ambas operaciones se "compensan" entre sí. El ítem c) de esta actividad permite extender el análisis hacia la idea de que el 100 se puede pensar como 10 x 10, entonces, si se multiplica a 54 x 10 x 10 y luego se lo divide por 100, el resultado final necesariamente será el número original porque se lo multiplicó y dividió por el mismo número.







La actividad 3 extiende dicho trabajo a divisiones con el fin de que los alumnos identifiquen que dividir sucesivamente por 10 equivale a dividir por 100 o por 1.000.



Las actividades 4 y 5 presentan una nueva complejidad: ahora es necesario anticipar las características que debe tener un determinado número para cumplir las condiciones que plantea la situación.

Este material es una adaptación del documento "*Matemática. Cálculo mental con números naturales para el docente / coordinado por Susana De Marinis. -1ª ed. – Buenos Aires: Ministerio de Educación – Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, 2008*".